الجمهورية العربية السورية

وزارة التعليم العالي

جامعة تشرين

كلية العلوم - قسم الرياضيات



المسائل القصوى في أسر التوابع الممثلة بالتكامل

رسالة مقدمة لكلية العلوم في جامعة تشرين للحصول على درجة الماجستير في التحليل الرياضي

تقديم

أحمد أمير ديب

إشراف

الأستاذ الدكتور حسن بدور

2011م – 1432 هـ

الفهرس

الملخص باللغة العربية

تحديد مجموعة قيم بعض الداليات في صفوف التوابع الممثلة بالتكامل

مقدمة 1

تهتم نظرية التحويلات المحافظة ، التي تعرف أيضاً بنظرية التوابع التحليلية المتباينة ، بالخواص الداخلية للتحويلات المحافظة للمناطق المستوية . أحد الفروع الرئيسة المعاصرة لهذه النظرية هي دراسة المسائل القصوى في مختلف أسر التوابع التحليلية . من أمثلة هذه الدراسات يمكن أن تكون مسألة تحديد مستقر الدالي (أي مجموعة القيم التي يقبلها هذا الدالي) الذي شكله العام:

في أسرة معينة من التوابع التحليلية و المتباينة في قرص الواحدة حيث z_0 نقطة من هذا القرص.

هناك سلسلة متكاملة من الطرائق التي تعالج المسائل القصوى في أسر التوابع العقدية [8]. إحدى هذه الطرق هي طريقة التمثيل التكاملي (التي تعرف أيضاً بطريقة الصيغ البنيوية). تعتمد هذه الطريقة على الاستفادة من قابلية التوابع ، في مجموعة من الفضاءات العقدية ، التمثيل بوساطة تكامل ريمان- ستلجس، الأمر الذي يجعل معالجة المسائل القصوى أكثر سهولة في هذه الفضاءات وخصوصاً في الحالة الخطية للداليات المدروسة.

يهدف هذا البحث إلى إيجاد مجموعة قيم الداليات الخطية من الشكل:

في بعض أسر التوابع التحليلية ذات التمثيل التكاملي في قرص الواحدة حيث z_0 نقطة من هذا القرص.

2 عرض المسألة في الفضاء E_q

لنرمز بـE_q لأسرة التوابع f التي لها الشكل:

(1)

حيث $q(z,t)$ تابع تحليلي في قرص الواحدة $D(|z|<1)$ بالنسبة للمتحول z من أجل كل t الواقعة ضمن المجال $[\alpha,\beta]$ و $\mu(t)$ تابع غير متناقص على المجال السابق بحيث يكون:

تعرف هذه الأسرة بأسرة التوابع ذات التمثيل التكاملي. هناك مجموعة من الخواص الهامة بالنسبة لهذا الأسرة نذكر منها [4]:

a. الأسرة E_q متراصة ومترابطة في توبولوجيا التقارب المنتظم.
b. مجموعة قيم الدالي $F(f)=f(z_0)$ حيث $f\in E_q$ مغلقة و مترابطة ومحدبة.
c. مجموعة قيم الدالي $F(f)=f(z_0)$ هي الغلاف المحدب للمنحني: $w(t)=q(z,t);\alpha\le t\le\beta$ (الغلاف المحدب لمجموعة ما W في المستوي هي أصغر مجموعة محدبة تحتوي على هذه المجموعة – يرمز له بالرمز $conv\ W$).

تفيد المبرهنة الآتية في إثبات المبرهنة **(2.2)** وما يليها:

2.1 مبرهنة

ليكن $H(t)$ تابعاً عقدياً مستمراً ذا متحول حقيقي t من المجال $[a,b]$ ولنرمز بالرمز $U[a,b]$ لمجموعة التوابع $\mu(t)$ غير المتناقصة في هذا المجال بحيث يكون:

عندئذ تتطابق مجموعة قيم التكامل:

(مع تغير μ) مع الغلاف المحدب للمنحني Γ المعطى بالمعادلة:

مبرهنة **2.2**

تتألف مجموعة قيم الدالي الخطي:

$J(f$ (2)

من الغلاف المحدب للمنحني Γ المعطى بالعلاقة :

$H(z_0, t) =$

حيث $q_z^{(k)}(z_0, t)$ معطاة من خلال العلاقة (1).

البرهان: ليكن الدالي الخطي $J(f)$ المعطى بالعلاقة (2)حيث $a_k(z)$ و$b_k(z)$ توابع مستمرة في قرص الواحدة ولندرس مجموعة قيم هذا الدالي في نقطة ما z_0عندما تتحول fعلىE_q.

بما أن:

(3)

إذن:

$$J(f) = \sum_{k=0}^{n}$$

حيث $f^{(0)}(z) = f(z)$ لذلك وبعد أن نرمز:

$H($ (4)

يصبح الدالي J المعطى بالعلاقة (2) تابعاً للتابع μ ونستطيع أن نكتب:

بتعويض $a = \alpha \,, b = \beta \,, H(t) = H(z_0, t)$ في المبرهنة (**2.1**) نحصل على صحة المبرهنة.

لنرمز بـ C لأسرة التوابع f التحليلية في قرص الواحدة D ذات القسم الحقيقي الموجب والتي تحقق الشرط $f(0) = 1$. تعرف هذه الأسرة بأسرة كاراتيودوري (أو فضاء كاراتيودوري - CARATHEODORY).

من المعلوم أن كل تابع من الفضاء C يقبل التمثيل التكاملي الآتي:

(5)

حيث $\mu \in U[-\pi, +\pi]$ (μ في هذه الحالة تابع غير متناقص في المجال $[-\pi, +\pi]$ ويحقق الشرط $\mu(+\pi) - \mu(-\pi) = 1$).

تعرف العلاقة(5)بالصيغة البنيوية في الفضاء C .

بوضع :

في الصيغة (5) نلاحظ أن الأسرة C هي أسرة جزئية من الفضاء E_q.

من هذه الحقيقة ومن المبرهنة (**2.1**) نحصل مباشرة على صحة المبرهنة الآتية:

مبرهنة 3.1

تتألف مجموعة قيم الدالي الخطي:

من الغلاف المحدب للمنحني Γ المعطى بالمعادلة:

$H(z_0, t) = a_0(z$

في هذا الفضاء تم البرهان أيضاً على النتائج الآتية:

مبرهنة 3.2

إذا كان: $h \in C$ و $arg\ h(z_0) = \frac{\pi}{3}$ فإن منطقة تحول الدالي: $F(h, h') = {h'}/{h}$

تقع ضمن القرص:

نتيجة 3.1

مجموعة قيم الدالي $F(f) = f(z_0)$ عندما يكون $f \in C$ و z_0 نقطة من قرص الواحدة D هي القرص المغلق $|w - w_0| \leq \mathrm{R}$ المعطى مركزه ونصف قطره بالعلاقتين:

(6)

نتيجة 3.2

مجموعة قيم الدالي: $F(f) = z_0 f(z_0)$ عندما $f \in C$ و z_0 نقطة واقعة على منصف الربع الأول (أو منصف الربع الثاني)، ضمن الدائرة $\gamma: |z| = 1$ هي القرص المغلق $|w - w_0| \leq R$ حيث:

(7)

4 دراسة منطقة تغير قيم الداليات في الأسرة V

لنرمز بـVلأسرة التوابع f التحليلية في قرص الواحدة D التي لها الشكل:

والتي تحقق الشرط : $|\arg f'(z)| < {}^{\pi}/_{2}$.

تعرف هذه الأسرة بأسرة التوابع ذات الدوران المحدود.

مبرهنة **4.1**

إذا كان $f \in V$ فإن: $f' \in C$.

البرهان: لدينا أولاً:

ولذلك $f'(0) = 1$. ومن ناحية أخرى لدينا:

لذلك:

وبما أن: $-{}^{\pi}/_{2} < \arg f'(z) < +{}^{\pi}/_{2}$ فرضاً إذن الطرف الأيمن في المساواة الأخيرة موجب وبالتالي $re\ f'(z) > 0$ الأمر الذي يعني أن $f' \in C$ وهو المطلوب.

سوف ندرس الدالي الخطي $J(f)$ معتمدين على المبرهنتين (**4.1**) ، (**2.1**)

في هذا السبيل نلاحظ أولاً(المبرهنة (**4.1**)) أن:

ومنه ينتج أن الصيغة البنيوية في الفضاء V هي من الشكل:

ومن ناحية ثانية وبوضع:

نجد أن V هي أسرة جزئية من الأسرة E_q

وفي الحالة هذه يكون:

(8)

(8′) $f^{(n)}(z$

مبرهنة **4.2**

تتألف مجموعة قيم الدالي الخطي:

من الغلاف المحدب للمنحني Γ المعطى بالمعادلة:

(9)

حيث $q_z^{(k)}(z_0,t)$ معطاة بوساطة العلاقات (8) و من أجل:

.$k=0,1,2,\cdots,n$

تطبيقات ونتائج 5

مما تقدم نحصل في هذا الفضاء على بعض النتائج نذكر منها:

نتيجة 5.1

منطقة تغير قيم الدالي $J(f)=f'(z_0)\,,z_0\in D$ في الفضاء V هي القرص المغلق $|w-w_0|\le \mathrm{R}$ حيث:

بكلمات أخرى: منطقة تحول النقطة $f'(z_0)$ من الفضاء V هي القرص المغلق:

.$|w-w_0|\le \mathrm{R}$

نتيجة 5.2

منطقة تغير قيم الدالي:

هي المنطقة المحدبة G المغلقة والمتناظرة بالنسبة للمحور الحقيقي والمحتواة ضمن القرص $|w-z_0|\le 2d$ حيث d معطى بوساطة العلاقة:

نتيجة **5.3**

منطقة تغير قيم الدالي:

في النقطة $z_0 = 0$ هي القرص المغلق: $|w-1| \leq 2(n-1)!$.

مسألة تقدير الأمثال في الأسرة V **6**

ليكن $f \in V$ وليكن:

(10)

منشور التابع f في سلسلة تايلور في قرص الواحدة.

باستخدام النتيجة **(5.3)** يمكن البرهان على صحة المبرهنة الآتية:

مبرهنة **6.1**

إذا كانت f تنتمي إلى الأسرة V فإن الأمثال في السلسلة:

تحقق المتراجحات:

وهذه المتراجحات لاتقبل تقديراً أفضل وذلك لوجود تابع هو:

تتحول من أجله المتراجحات المذكورة – بعد نشر هذا التابع في سلسلة تايلور- إلى مساواة من أجل كل n.

تعريف 7.1

نقول إن المنطقة G نجمية بالنسبة للنقطة O إذا كان كل مستقيم مار من النقطة O يقطع هذه المنطقة وفق مستقيم واحد (أو نصف مستقيم واحد أو قطعة مستقيمة واحدة).

تعريف 7.2

نقول عن التابع f التحليلي في قرص الواحدة إنه تابع نجمي بالنسبة للصفر إذا كانت صورة قرص الواحدة هذا منطقة نجمية بالنسبة للصفر.

يرمز لمجموعة التوابع من هذا النوع بالرمز S^* الذي يعرف بفضاء التوابع النجمية (أو بأسرة التوابع النجمية).

من المعروف أن انتماء التابع f للأسرة S^* يكافئ انتماء التابع $z\,f'/f$ للأسرة C . أي أن:

(11)

من هذه العلاقة ومن الصيغة البنيوية في C نستطيع إيجاد التمثيل التكاملي لتوابع الأسرة S^* وهي:

مبرهنة 7.1

إدا كان $f \in S^*$ فإن:

في الفضاء S^* تكون المبرهنة الآتية صحيحة:

إذا كان $f \in S^*$ فإن منطقة تحول الدالي $F(f) = [z/f(z)]^{1/2}$ في النقطة z_0 هي القرص:

الفصل الأول

معلومات أولية

1.1 تكامل ستلجس وخواصه:

ليكن $f(x)$ تابعاً حقيقياً ومحدوداً على المجال $[a, b]$ ولنرمز بالرمز P لتجزئة هذا المجال إلى n من المجالات الجزئية بوساطة النقاط $x_0, x_1, x_2, \dots \dots, x_n$ حيث يكون :

ولنقابل كل تجزئة من هذا النوع بالأعداد :

M_i

ليكن α تابعاً آخرَ متزايداً على المجال $[a, b]$ ولنرمز :

سوف نعرف الحد الأدنى لـ $\mathcal{U}$ والحد الأعلى لـ $\mathcal{L}$ بالعلاقتين :

(1.1)

(1.2)

مع العلم أن الحدين الأعلى والأدنى مأخوذان بالنسبة لجميع إمكانات التجزئة P للمجال $[a, b]$.

تعريف **(1.1.1)**

نقول إن التابع $f(x)$ قابل للمكاملة بمفهوم ريمان– ستلجس (أو اختصاراً بمفهوم ستلجس) إذا كان الطرفان من اليسار في (1.1) و (1.2) متساويين ونكتب عندئذ :

نلاحظ أنه إذا وضعنا $\alpha(x) = x$ نحصل على تكامل ريمان للتابع $f(x)$ على المجال $[a, b]$ أي على التكامل :

(1.3)

وفيما يلي نعرض بعض خواص تكامل ستلجس التي تنتج مباشرة من التعريف:

خاصة **(1.1.1)**

لدينا دائماً :

(1.4)

خاصة **(1.1.2)**

f قابل للمكاملة بمفهوم ستلجس على المجال $[a, b]$ إذا وفقط إذا وجد من أجل كل $\varepsilon > 0$ تجزئة P تحقق: $\mathcal{U}(P, f, \alpha) - \mathcal{L}(P, f, \alpha) < \varepsilon$.

خاصة **(1.1.3)**

إذا كانت $\mathcal{U}(P, f, \alpha) - \mathcal{L}(P, f, \alpha) < \varepsilon$ محققة من أجل التجزئة $P = \{x_0, x_1, \cdots\cdots, x_n\}$ و كانت s_i, t_i نقاط اختيارية في المجال $[x_{i-1}, x_i]$ وكان f قابلاً للمكاملة بمفهوم ستلجس فإن:

(1.5)

(1.6)

خاصة (**1.1.4**)

إذا كان التابع $f(x)$ مستمراً على المجال $[a, b]$ كان تكامل ستلجس لهذا التابع موجوداً وكان:

$\forall \varepsilon > 0$

خاصة (**1.1.5**)

إذا كان التابع f مطرداً على المجال $[a, b]$ و α تابعاً مستمراً عليه كان تكامل ستلجس موجوداً على هذا المجال .

خاصة (**1.1.6**)

إذا كان fتابعاً قابلاً للمكاملة بمفهوم ستلجس على المجال $[a, b]$ فإن التابع $c.f$ يكون قابلاً للمكاملة بمفهوم ستلجس ويحقق المساواة:

خاصة (**1.1.7**)

إذا كان f_1, f_2 تابعين قابلين للمكاملة بمفهوم ستلجس على المجال $[a, b]$كان مجموعهما $(f_1 + f_2)$ تابعاً قابلاً للمكاملة بمفهوم ستلجس ويحقق المساواة:

و يتحقق أيضاً:

خاصة (**1.1.8**)

إذا كان f تابعاً قابلاً للمكاملة بمفهوم ستلجس على المجال $[a, b]$فإن:

خاصية (**1.1.9**)

إذا كان f و $\alpha'(x)$ قابلين للتكامل بمفهوم ريمان كان :

التوابع ذات التغير المحدود : 1.2

تعريف

(1.2.1)

ليكن f تابعاً معرفاً على المجال $[a,b]$ ولتكن P تجزئة كيفية لهذا المجال ولنضع :

عندئذ يدعى $V_a^b(f)$ المعطى بالعلاقة:

(1.7)

بالتغير الكلي للتابع f على المجال $[a,b]$ ، وإذا كان $V_a^b(f) < \infty$ قلنا أن f ذو تغير محدود على $[a,b]$ مهما تكن التجزئة.

فمثلاً إذا كان f مطرداً على المجال $[a,b]$ كان ذا تغير محدود على هذا المجال وكان :

تعريف

(1.2.2)

يعرف تكامل ستلجس (إذا وجد) للتابع الحقيقي f بالنسبة للتابع g المحدود التغير بالعلاقة

(1.8)

مع العلم أن $g = \beta - \gamma$ و β, γ تابعان متزايدان.

مما سبق نستنتج الخواص التالية:

خاصية (1.2.1)

تكامل ستلجس موجود دائماً عندما يكون f مستمراً و g ذا تغير محدود.

خاصية (1.2.2)

إذا كان f, g تابعين ذوي تغير محدود كان مجموعهما $f + g$ وجداؤهما $f . g$ ذوي تغير محدود.

خاصية (1.2.3)

ليكن α تابعاً متزايداً على المجال $[a, b]$ ولتكن (f_n) متتالية من التوابع القابلة للمكاملة بمفهوم ستلجس و المتقاربة بانتظام نحو f عندئذ:

خاصية **(1.2.4)**

لتكن $\{\alpha_n\}$ متتالية من التوابع ذات التغير المحدود على المجال $[a, b]$ المحققة للشروط:

عندئذ:

مع العلم أن: $(\alpha_n \rightrightarrows \alpha)$: α_n متقاربة بانتظام نحو α .

تكامل ستلجس للتابع العقدي 1.3

تعريف

(1.3.1)

نعرف تكامل ستلجس للتابع العقدي المستمر $f(t) = u(t) + iv(t)$ ذي المتحول الحقيقي t على المجال $[a, b]$ بالنسبة للتابع الحقيقي $\alpha(t)$ ذي التغير المحدود بالعلاقة:

ينتج من هذا التعريف أن كل الخواص السابقة المتعلقة بتكامل ستلجس تنقل مباشرة إلى حالة التابع العقدي ذو المتحول الحقيقي.

سنقتصر فيما يلي على نقل بعض الخواص التي سنستفيد منها مستقبلاً .

مبرهنة **(1.3.1)**

إذا كان $V(\alpha)$ التغير الكلي للقيمة المطلقة للتابع α على المجال $[a,b]$ وكان f تابعاً حقيقياً و مستمراً على المجال $[a,b]$ فإن:

إثبات:

إذا كان التابع f حقيقياً فإن :

$$\left|\int_a^b f.d\alpha\right|$$

مبرهنة **(1.3.2)**

إذا كان f عقدياً وكان $V(\alpha)$ التغير المحدود للتابع α فإن العلاقة :

إثبات:تنتج العلاقة المطلوبة من جملة العلاقات:

$$\left|\int_a^b f.d\alpha\right|$$

مبرهنة (1.3.3)

لتكن متتالية التوابع العقدية $\{f_n\}$ المستمرة على المجال $[a,b]$ والمتقاربة بانتظام نحو $f(t)$ ولتكن متتالية التوابع الحقيقية $\{\alpha_n\}$ ذات التغير المشترك المحدود والمتقاربة نحو $\alpha(t)$ عندئذ:

إثبات:بحسب الفرض لدينا:

لذلك وبحسب المبرهنة (**1.3.2**) يكون:

$\left|\int_a^b (f_n\right.$

وبما أن f_n متقاربة بانتظام نحو f فإن الطرف الأيمن يسعى نحو الصفر وبالتالي:

$(*)$

من ناحية أخرى وبحسب الخاصة (**1.2.4**) ينتج بسهولة أن:

$(**)$

والآن بوضع:

$\left|\int_a^b f_n d\alpha_n\right.$

نستنتج من $(*)$ و $(**)$ أن:

$$\left|\int_a^b f_n d\alpha_n -\right.$$

وبالتالي:

وهو المطلوب.

تكامل بواسون: 1.4

تعريف(التابع التوافقي)

(1.4.1)

نقول عن التابع الحقيقي $u(x,y)$ المعرف على المنطقة G إنه توافقي في هذه المنطقة إذا وجد مشتقاه الجزئيان المستمران من المرتبة الأولى والثانية وتحققت معادلة لابلاس التفاضلية:

من أجل كل نقطة (x,y) من G.

ونقول إن التابع $u(x,y)$ توافقي في النقطة (x_0,y_0) إذا كان توافقياً في جوار ما لهذه النقطة.

من التعريف ينتج:

خاصة (1.4.1)

إذا كان u, v تابعين توافقيين في نقطة ما فإن التابع: $au + bv\ ; a, b = const$ توافقي في هذه النقطة.

خاصة (1.4.2)

إذا كان التابع $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ تحليلياً في المنطقة G فإن قسميه الحقيقي والتخيلي توافقيان في هذه المنطقة.

ومنه ينتج أن كل تابع توافقي في منطقة وحيدة الترابط يصلح لأن يكون قسماً حقيقياً أو تخيلياً لتابع تحليلي في تلك المنطقة.

خاصة (1.4.3)

يقبل التابع التوافقي الاشتقاق من أي مرتبة في منطقة وجوده.

تعريف (1.4.2)

إذا كان التابعان u, v توافقيين في منطقة مشتركة ويحققان شرطي كوشي- ريمان فيها:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\ , \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

فإننا ندعو v بالتابع المرافق للتابع u.

ونقول عندئذ إن: u, v مترافقان.

كل تابع توافقي $u(x,y)$ في القرص $\overline{D}: |z| \leq r$ يقبل التمثيل في كل نقطة داخلية من $\overline{D}$ بوساطة التكامل :

حيث: $u(\theta) = u(r.\cos\theta, r.\sin\theta)$.

إثبات:

لتكن z نقطة داخلية من $\overline{D}$ حيث: $z = x + iy = \rho.e^{i\varphi} : \rho < r$.

وليكن $u(x,y)$ القسم الحقيقي للتابع $f(z)$ التحليلي على القرص $\overline{D}$، وبفرض γ الدائرة المعرفة بالشكل:

عندئذ يكون: $d\zeta = rie^{i\theta}d\theta = i\zeta d\theta$

وبالتالي من أجل $|z| < r$ نجد أن:

$(*)$

نستبدل في العلاقة الأخيرة z بـ $z' = \frac{r^2}{\bar{z}}$ المتناظرة مع z بالنسبة للدائرة γ، عندئذ تنعدم قيمة التكامل ومنه:

$(**)$

بطرح العلاقتين$(*)$ و$(**)$ نجد:

f

$$\frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{-\bar{z}}{\bar{\zeta} - \bar{z}}$$

$f(z)$

وبالتالي يتم المطلوب باستبدال $f(z)$ بـ $u(x,y)$ و $f\left(re^{i\theta}\right)$ بـ $u(\theta)$.

تعريف

(1.4.3)

يعرف المقدار:

بنواة بواسون.

مبرهنة **(1.4.2)**

تقبل نواة بواسون أن توضع بالشكل:

إثبات:

$$\frac{\zeta+z}{\zeta-z}=\frac{(\zeta+z)(}{(\zeta-z)(}$$

$$=\frac{r^2-r\zeta e^{-i(\theta}}{}$$

$$=\frac{r^2-r\zeta[\cos(}{}$$

$$=\frac{r^2-r\zeta[\cos\theta}{}$$

$$=\frac{r^2+2ir\zeta.\sin}{|\zeta}$$

مبرهنة **(1.4.3)**

إذا كان التابع f تحليلياً في $D(R): |z| < R$ ومستمراً على $\overline{D(R)}$ وكان قسمه الحقيقي على الدائرة $\gamma: \zeta = Re^{i\theta}$ هو $\mu(\theta): 0 \le \theta \le 2\pi$ فإن لهذا التابع الشكل:

(تدعى هذه العلاقة بصيغة شوارتز).

إثبات:لدينا بحسب نظرية بواسون ونواة بواسون:

$u(z) =$

ولكن: $$\mu(\theta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z} = \mu(\theta)re\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right) + i\mu(\theta)im\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right)$$

ومنه: $$re\left(\mu(\theta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right) = \mu(\theta)re\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right)$$

وبالتالي:

نضع الآن:

$\Rightarrow$

والتابع $f(z)$ تحليلي على القرص $D(R)$.

إذا كان التابع $U(z)$ توافقياً في القرص $D(R)$ ومستمراً في $\overline{D(R)}$ وغير سالب على الدائرة $\gamma: |z| = R$ فإن:

إثبات:من المعلوم أن:

$$\left|Re^{i\theta} + z\right|$$
$$\left|Re^{i\theta} - z\right|$$

ولذلك:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}$$

حيث:

بشكل مشابه ومن المتراجحة:

نبرهن صحة الطرف الآخر من المتراجحة.

مبرهنة هيرغلوتز (*HERGLOTZ*) (**1.5.1**)

ليكن $f(z)$ تحليلياً في القرص $D(R)$ بحيث يكون :

عندئذ: يوجد تابع $\mu(t)$ غير متناقص على المجال $[0,2\pi]$ و $\mu(0) = 0, \mu(2\pi) = 1$
بحيث يكون:

إثبات: لنضع:

$u(z) = re$

عندئذ بحسب صيغة شوارتز يكون من أجل $|z| < R_n$:

$f(z) = \frac{1}{2\pi}$

وبما أن $\mu'_n(t)$ هي تابع مستمر على المجال $[0,2\pi]$ فإن استخدام صيغة شفارتز بشكل تكامل ريمان - ستلجس تؤدي إلى أن :

وبما أن $re\, f(z) > 0$ فإن:

ومن ذلك ينتج أن التوابع $\mu_n(t)$ متزايدة على المجال $[0,2\pi]$ وأن:

$u(0) =$

وبذلك يكون: $\mu_n(0) = 0 , \mu_n(2\pi) = 1$ وبالتالي بحسب مبدأ الاختيار(المعروف بمبدأ هيللي [7])يمكن اختيار متتالية جزئية μ_{n_k} من μ_n متقاربة من التابع غير المتناقص $\mu(t)$ على المجال $[0,2\pi]$ حيث: $\mu(0) = 0, \mu(2\pi) = 1$.

من هذه الحقيقة ومن التقارب المنتظم الآتي:

نستنتج بحسب المبرهنة (**1.3.3**) التقارب الآتي:

$f($

وهو المطلوب.

الغلاف المحدب 1.6

تعريف

(1.6.1)

لتكن W مجموعة كيفية في المستوي، يدعى تقاطع جميع المجموعات المحدبة التي تحتوي على W بالغلاف المحدب لـ W ويرمز له بالرمز $conv\ W$.

وبمعنى آخر : الغلاف المحدب للمجموعة W هو أصغر مجموعة محدبة تحتوي على W.

من هذا التعريف ينتج أن الغلاف المحدب للمجموعة W هو إغلاق المجموعة :

$\Big\{w \in$

فمثلاً الغلاف المحدب للنقاط w_1, w_2, w_3 هو مثلث تقع رؤوسه في هذه النقاط. ويعمم ذلك على كثيرات الأضلاع.

ملاحظة **(1.6.1)**

يمكن البرهان [6] على أنه إذا كان:

فإنه توجد ثلاث نقاط $w_1^{(n)}, w_2^{(n)}, w_3^{(n)}$ من بين النقاط $w_1, w_2, \dots \dots, w_n$ بحيث يكون:

(1.9)

مبرهنة **(1.6.1)**

ليكن $H(t)$ تابعاً عقدياً مستمراً على المجال $t \in [a, b]$ ولتكن U مجموعة التوابع غير المتناقصة على هذا المجال والمحققة للشرطين: $\mu(a) = 0, \mu(b) = 1$

عندئذ: تتطابق مجموعة قيم تكامل ستلجس

مع الغلاف المحدب للمنحني Γ المعطى بالعلاقة:

أي أن:

<u>**إثبات**</u>:

الغلاف $conv\ \Gamma$ لمجموعة الأعداد العقدية Γ هي إغلاق المجموعة:

$$\left\{ w : w = \sum_{k=1}^{n} \right.$$

عندئذ كل نقطة:

تقبل أن توضع بالشكل:

حيث: w_{k_m} ثلاث نقاط مختارة بشكل مناسب من بين $w_1, w_2, \cdots, w_n$ بحيث يكون:

وهذا ممكن بحسب الملاحظة **(1.6.1)**

إذا كان $w \in conv\ \Gamma$ ،كان بحسب التعريف:

عندئذ وبحسب مبرهنة بولزانووايرشتراس يمكن أن نقبل أن:

وعليه ونتيجة للاستمرار يكون:

وبذلك يكون:

حيث $\mu(t)$ تابع ثابت مع ثلاث قفزات في النقاط t_1, t_2, t_3.

وبالعكس: إذا كان:

فإن:

حيث w_n هي المجاميع الجزئية المنتهية لتكامل ستلجس المناسبة لتجزئة ما للمجال $[a, b]$،
وبالتالي:

ولذلك $w_n \in \overline{conv}\Gamma$ وفي النهاية $w \in conv\ \Gamma$ كون $conv\ \Gamma$ مجموعة مغلقة.

المسألة العامة في أسر التوابع ذات التمثيل التكاملي 1.7

تهتم نظرية التحويلات المحافظة ، التي تعرف أيضاً بنظرية التوابع التحليلية المتباينة ، بالخواص الداخلية للتحويلات المحافظة للمناطق المستوية . أحد الفروع الرئيسة المعاصرة لهذه النظرية هي دراسة المسائل القصوى في مختلف أسر التوابع التحليلية . من أمثلة هذه الدراسات يمكن أن تكون مسألة تحديد مستقر الدالي (أي مجموعة القيم التي يقبلها هذا الدالي) الذي شكله العام:

$J(f)$

في أسرة معينة من التوابع التحليلية و المتباينة.

هناك سلسلة متكاملة من الطرائق التي تعالج المسائل القصوى في أسر التوابع العقدية [8]. إحدى هذه الطرق هي طريقة التمثيل التكاملي (التي تعرف أيضاً بطريقة الصيغ البنيوية). تعتمد هذه الطريقة على الاستفادة من قابلية التوابع ، في مجموعة من الفضاءات العقدية ، التمثيل بوساطة تكامل ريمان- ستلجس الأمر الذي يجعل معالجة المسائل القصوى أكثر سهولة في هذه الفضاءات وخصوصاً في الحالة الخطية للداليات المدروسة.

يهدف هذا البحث إلى إيجاد مجموعة قيم الداليات الخطية من الشكل:

في بعض أسر التوابع التحليلية ذات التمثيل التكاملي.

لنرمز بـE_q لأسرة التوابع f التي لها الشكل:

(1.10)

حيث $q(z,t)$ تابع تحليلي في قرص الواحدة $D(|z| < 1)$ بالنسبة للمتحول z من أجل كل t الواقعة ضمن المجال $[\alpha, \beta]$ و $\mu(t)$ تابع غير متناقص على المجال السابق بحيث يكون:

تعرف هذه الأسرة بأسرة التوابع ذات التمثيل التكاملي.

هناك مجموعة من الخواص المهمة بالنسبة لهذا الأسرة [4] نذكر منها:

a. الأسرة E_q متراصة ومترابطة في توبولوجيا التقارب المنتظم.
b. مجموعة قيم الدالي $F(f) = f(z_0)$ حيث $f \in E_q$ مغلقة و مترابطة ومحدبة.
c. مجموعة قيم الدالي $F(f) = f(z_0)$ هي الغلاف المحدب للمنحني:

سوف نقتصر على معالجة المسألة – دون الإقلال من العمومية – على الدالي الخطي:

(1.11)

حيث $a_k(z)$ توابع مستمرة في قرص الواحدة ولندرس مجموعة قيم هذا الدالي في نقطة ما z_0 عندما تتحول f على E_q.

بما أن:

$f($

إذن:

$$J(f) = \sum_{k=0}^{n}$$

حيث: $f^{(0)}(z) = f(z)$ لذلك وبعد أن نرمز:

(1.12)

يصبح الدالي J تابعاً للتابع μ ونستطيع أن نكتب:

بتعويض $a = \alpha, b = \beta \, , H(t) = H(z_0, t)$ في المبرهنة (**2.1**) نكون قد برهنا على صحة ما يلي:

مبرهنة **(1.7.1)**

تتألف مجموعة قيم الدالي الخطي:

من الغلاف المحدب للمنحني Γ المعطى بالعلاقة:

حيث $q_z^{(k)}(z_0, t)$ معطاة بوساطة العلاقات (1.10).

الفصل الثاني

تحديد مستقر الداليات الخطية في فضاء كاراتيودوري

2.1 فضاء كاراتيودوري C وخواصه

تعريف

(2.1.1)

يعرف فضاء كاراتيودوري بأنه فضاء التوابع f التحليلية في قرص الواحدة $D: |z| < 1$ ذات القسم الحقيقي الموجب والتي تحقق الشرط $f(0) = 1$ ويرمز له بالرمز C.

يتبين أن هذا الفضاء هو فضاء جزئي من الفضاء $\boldsymbol{E_q}$ من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنة (2.1.1)

كل تابع من الفضاء C يقبل التمثيل التكاملي الآتي:

(2.1)

مع العلم أن $\mu(t)$ تابع غير متناقص في المجال $[-\pi, +\pi]$ ويحقق الشرط:

تعرف العلاقة (2.1)بالتمثيل التكاملي (أو الصيغة البنيوية *Structural Formula*) في الفضاءC.

باستخدام هذه الصيغة يمكن استنتاج خواص كثيرة للأسرة C نذكر منها:

أ- الأسرة C متراصة ومترابطة.

ب- إذا كان:

$f(z) =$

منشور التابع f في سلسلة تايلور فإن:

(2.2)

وهذا ناتج من أن:

$$f(z) =$$

بما أن:

حيث $\left|e^{-it}z\right| < 1 \;\; ; \;\; \forall |z| < 1$

فإن:

$$f(z) = \int_{-\pi}^{+\pi}$$

وبالتالي:

$$|b_n| = \left| \int_{-\pi}^{+\pi} \right.$$

ت- من أجل كل تابع f من C ومن أجل كل نقطة z من قرص الواحدة D لدينا:

$$\left|f^{(n}\right.$$

وهذا أيضاً ناتج من أن:

$\left|f^{(n)}(z)\right| =$

مبرهنة (2.1.2)

من أجل كل نقطة w من القرص المغلق $|z| \leq 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n يوجد تابع h من الفضاء C يكون أحد أمثال منشورها b_n في سلسلة تايلور مساوياً للنقطة w.

إثبات: رأينا بحسب الخاصة (ب) أن:

و بالتالي من أجل كل $h \in C$:

$h(z) =$

فإذا كان الآن:

$h(z$

فإن:

وهذا يعني بحسب المبرهنة **(1.7.1)** أن مجموعة تحول الأمثال b_n هي الغلاف المحدب للمنحني المعطى بالعلاقة:

وهو القرص $|z| \leq 2$ وعليه لا بد من وجود تابع في C يكون أحد أمثاله مساوياً للنقطة (أو العدد) w.

مبرهنة **(2.1.3)**

إذا كان: $h \in C$ و $arg\, h(z_0) = \frac{\pi}{3}$ فإن منطقة تحول الدالي: $F(h, h') = {h'}/{h}$

تقع ضمن القرص:

إثبات: بما أن التابع: $\varsigma = \frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}$ ينقل قرص الواحدة إلى نفسه (يمكن التحقق من ذلك بسهولة) فإن قيم التابع:

سوف تبقى منتمية إلى الفضاء C . وبما أن:

$|w - w_0| =$

فإن:

وفي هذه الحالة سيكون التابع:

محققاً لشروط تمهيدية شوارتز:

الأمر الذي يعني أن:

وبالتالي:

نستنتج من ذلك أن:

ومن ناحية ثانية نجد أن:

$\varphi'(z) = \Big(\frac{w}{w}$

وبالتالي:

والآن باشتقاق التابع: $w = h\left(\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}\right)$ بالنسبة للمتحول z ثم التعويض في المساواة أعلاه نحصل على المتراجحة:

وهذه بدورها تؤدي إلى المتراجحة:

وبما أن: $\arg\ h(z_0) = \pi/_3$ فرضاً فإن:

وبذلك يكون:

وفي النهاية:

وهو المطلوب (لاحظ هنا أننا برهنا على هذه النتيجة دون الاستعانة بالمبرهنة (**1.7.1**)).

2.2 عرض المسألة في الفضاء C

ليكن الدالي:

حيث: $a_k(z)$ توابع مستمرة في قرص الواحدة. لندرس مجموعة قيم هذا الدالي في نقطة ما z_0 عندما تتحول f على الفضاء C.

بما أن:

إذن:

$J(f) = a_0(z$

لذلك وبعد أن نرمز:

(2.3) $\quad q^{(0)}(z$

يصبح الدالي J تابعاً للتابع μ ونستطيع أن نكتب:

بتعويض: $H(t) = H(z_0, t) \;\; , \alpha = -\pi, \beta = +\pi$ في المبرهنة **(1.7.1)** نستنتج صحة المبرهنة الآتية:

مبرهنة **(2.2.1)**

تتكون مجموعة قيم الدالي الخطي:

من الغلاف المحدب للمنحني Γ المعطى بالعلاقة:

$\Gamma: H(z$

حيث $q_z^{(k)}(z_0, t)$ معطاة بوساطة العلاقات (2.3).

تطبيقــات 2.3

تطبيق **(2.3.1)**

مجموعة قيم الدالي $F(f) = f(z_0)$ عندما يكون $f \in C$ و z_0 نقطة من قرص الواحدة D هي القرص المغلق $|w - w_0| \leq \mathrm{R}$ المعطى مركزه ونصف قطره بالعلاقتين:

(2.4)

بكلمــات أخــرى: منطقــة تحــول النقطــة $f(z_0)$ مــن الفضــاء C هــي القــرص المغلــق $|w - w_0| \leq \mathrm{R}$

إثبات: بما أن لتوابع الأسرة C الشكل:

فـإن اسـتخدام النظريـة (**2.2.1**) يـؤدي إلـى أن مجموعـة قـيم الـداليF هـي الغـلاف المحـدب للمنحني:

فــي ســبيل معرفــة شــكل هــذا المنحنــي نضــع معادلتــه بالشــكل الــديكارتي التــالي: $H(t) = u + i.v$ فنجد بعد تحويلات بسيطة أن:

$$H(t) = \frac{1 + \ldots}{1 - \ldots}$$

وعندئذ:

$$u = \frac{1 - \ldots}{|1 - e \ldots}$$

$$v = \ldots$$

حيث $z_0 = x_0 + iy_0$.

بإيجاد نسبة v على u نحصل على:

$$\frac{v}{u} = \frac{2(\ldots}{\ldots}$$

ومنه:

$(*)$

نعوض في علاقة v فنحصل على:

$(**)$

بتربيع العلاقتين $(*)$ و $(**)$ وجمع الناتج نجد:

$|z_0|^2 =$

$4|z_0|^2$

$0 =$

نقسم طرفي العلاقة على $(1-|z_0|^2)^2 \neq 0$ فنحصل على:

$v^2 + u^2 - 2$

وهذا بدوره يؤدي إلى المساواة:

التي تمثل معادلة دائرة مركزها w_0 ونصف قطرها R معطيان بالعلاقة (2.4) وبذلك يكون الغلاف المحدب لهذه الدائرة هو القرص المغلق الذي محيطه الدائرة الناتجة نفسها أي $|w - w_0| = \mathrm{R}$ وهو المطلوب.

تطبيق **(2.3.2)**

مجموعة قيم الدالي: $F(f) = z_0 f(z_0)$ عندما $f \in C$ و z_0 نقطة واقعة على منصف الربع الأول (أو منصف الربع الثاني)، ضمن دائرة الواحدة هي القرص المغلق $\overline{D}(w_0, R)$ حيث:

(2.5)

إثبات: بوضع:

a_0

في المبرهنة (**2.2.1**) يكون للمنحني Γ الشكل:

لمعرفة شكل هذا المنحني نلاحظ أولاً أن z_0 واقعة على القطعة المستقيمة $[-1 - i, 1 + i]$ وبالتالي يمكن أن توضع بالشكل: $z_0 = \alpha(1 + i)/\sqrt{2}$ حيث: $-1 \le \alpha \le +1$.

فإذا وضعنا:

وجدنا، بعد حسابات بسيطة، أن:

وحصلنا - بعد التخلص من الوسيط t- على العلاقة:

(2.6)

وعندئذ يصبح بالإمكان وضع معادلة المنحني Γ بالشكل الديكارتي التالي:

حيث:

أو ما يعادلهما:

عندئذ: وبعد التعويض في(2.6)، نحصل على العلاقة:

التي تؤدي- بعد الاختصار- إلى المساواة:

هذه المساواة تمثل معادلة دائرة محددة بالمركز w_0 ونصف القطر R المعطيان بالعلاقة (2.5) مع العلم أن: $|z_0| = \alpha$. نستنتج من ذلك أن منطقة تغير قيم الدالي المطلوبة هي القرص المغلق $|w - w_0| \leq R$. وهو المطلوب.

تطبيق **(2.3.3)**

منطقة تغير قيم الدالي: $F(f) = f(z) + f^{(n)}(z)$ ، $f \in C$ في النقطة $z = 0$ هي القرص المغلق $|w - 1| \leq 2n!$.

إثبات: بأخذ:

$a_0(z)$

و $z_0 = 0$ في المبرهنة (**2.2.1**) يكون لمعادلة للمنحني Γ الشكل:

$w(t) = H(0, t$

الذي يمثل دائرة معادلتها $|w - 1| = 2n!$. وبذلك يكون القرص المغلق $|w - 1| \leq 2n!$ هو الغلاف المحدب للمنحني Γ الذي يشكل في الوقت نفسه منطقة تغير قيم الدالي المطلوبة .

2.4 مسألة تقدير الأمثال في الأسرة C

سوف نبرهن في على صحة المتراجحات (2.2) الواردة في المقدمة بطريقة جديدة من خلال المبرهنة (**2.2.1**) والنتائج السابقة.

مبرهنة **(2.4.1)**

إذا كان التابع f ينتمي إلى الأسرة C وكان:

$f(z)$

منشوره في سلسلة تايلور فإن:

إثبات: في سبيل ذلك نبحث عن مستقر الدالي:

المعرف في الفضاء C وذلك في النقطة $z_0 = 0$.

بملاحظة أن المنحني Γ الذي معادلته في هذه الحالة من الشكل: (قارن تطبيق(**2.3.3**))

$w(t)$

يعبر عن دائرة مركزها الصفر ونصف قطرها $2n!$، نستطيع أن نستنتج أن القرص المغلق $|w| \leq 2n!$ هو الغلاف المحدب للمنحني Γ وهو بالتالي مجموعة مستقر الدالي F المذكور.

ليكن الآن:

$f(z)$

منشور التابع f في سلسلة تايلور في قرص الواحدة D. عندئذ:

ولكن المقدار الواقع في الطرف الأيسر من هذه المعادلة يقع - كما رأينا- ضمن القرص $|w| \leq 2n!$ فهو إذن يحقق العلاقة:

ومنه نستنتج أن: $|b_n| \leq 2$ من أجل كل عدد طبيعي n. بهذا ينتهي المطلوب الذي يمثل في الوقت نفسه برهاناً آخرَ للخاصة (2.2) المذكورة آنفاً.

الفصل الثالث

حل المسألة في فضاء التوابع التحليلية ذات الدوران المحدود

3.1 فضاء التوابع التحليلية ذات الدوران المحدود V وخواصه

تعريف (3.1.1)

لنرمز بـ Vالأسرة التوابع f التحليلية في قرص الواحدة D التي تحقق الشرط:

تعرف هذه الأسرة بفضاء التوابع التحليلية ذات الدوران المحدود.

سوف نستفيد من التمهيدية الآتية التي تبين العلاقة بين الأسرتين V و C.

مبرهنة (3.1.1)

إذا كان $f \in V$ فإن $f' \in C$.

إثبات: ليكن $f \in V$. لدينا أولاً وبحسب التعريف: $f'(0) = 1$. ومن ناحية أخرى لدينا:

لذلك:

وبما أن: $-\pi/2 < \arg f'(z) < \pi/2$ فرضاً إذن الطرف الأيمن في المساواة الأخيرة موجب

وبالتالي: $re\, f'(z) > 0$ الأمر الذي يعني أن: $f' \in C$ وهو المطلوب.

من هذه المبرهنة ومن العلاقة (2.1) ينتج مباشرة أن:

وبالتالي:

وبذلك يكون للتابع f من الأسرة V التمثيل التكاملي الآتي:

(3.1)

الذي يعرف بالصيغة البنيوية في الفضاء V.

باستخدام هذه الصيغة يمكن الحصول عل خواص كثيرة للأسرة V نعرض منها الخاصتين التاليتين:

مبرهنة (3.1.2)

إذا كان:

$f(z$

منشور التابع f في سلسلة تايلور فإن:

(3.2)

إثبات: لدينا:

$$f(z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \Bigg[\int_{0}$$

ولذلك:

$$|a_n| =$$

وبالتالي: $|a_n| \le \frac{2}{n}$ من أجل كل عدد طبيعي n.

مبرهنة **(3.1.3)**

من أجل كل تابع fمن V ومن أجل كل نقطة z من قرص الواحدة لدينا:

<u>الإثبات</u>: بإجراء الاشتقاق:

$$f^{(n)}(z) =$$

$$\left|f^{(n)}(z)\right| =$$

لنعد الآن إلى الدالي:

(3.3)

ولندرس مجموعة تغير قيمه في الفضاء V عندما تكون $z = z_0$ نقطة محددة من القرص D.
باشتقاق طرفي العلاقة (3.1)، n من المرات بالنسبة لـ z نحصـل في النقطة z_0على العلاقات:

$f^{(n)}$

وعندئذ:

$J(f) = a_0(z_0$

لذلك وبعد أن ندخل الرموز:

(3.4)

نجد أن:

يصبح الدالي J تابعاً للتابع μ ونستطيع أن نكتب:

بتعويض:

في المبرهنة (**1.7.1**) نستنتج صحة المبرهنة الآتية:

مبرهنة **(3.2.1)**

تتألف مجموعة قيم الدالي الخطي:

من الغلاف المحدب للمنحني Γ المعطى بالمعادلة:

$\Gamma:$ (3.5)

حيث $q^{(k)}(z_0, t)$معطاة بوساطة العلاقات (3.4) من أجل $k = 0,1,2,\cdots,n$.

سوف نبحث فيما يلي عن مستقر بعض الداليات في بعض الحالات الخاصة.

لنأخذ أولاً الدالي الآتي:

إن منطقة تغير قيم هذا الدالي هي ، بحسب المبرهنة (**3.2.1**) ، الغلاف المحدب للمنحني:

(لاحظ في العلاقة((3.5)) أن:

من التطبيق (**2.3.1**) نخلص إلى النتيجة الآتية:

نتيجة (**3.3.1**)

منطقة تغير قيم الدالي $J(f) = f'(z_0)$ ،$z_0 \in D$ في الفضاء V هي القرص المغلق $|w - w_0| \leq \mathrm{R}$حيث:

بكلمات أخرى: منطقة تحول النقطة $f'(z_0)$ من الفضاء V هي القرص المغلق $|w - w_0| \leq \mathrm{R}$.

سوف نبحث الآن في الفضاء V عن منطقة تغير قيم الدالي: $J(f) = f(z_0)$. لدينا في هذه الحالة؛ بحسب المبرهنة (**3.2.1**) أيضاً ، أن:

$a_0(z_0$

$W($

بإجراء التكامل بالنسبة للمتحول zنجد أن:

من المعروف أن [3] الفرع الرئيس للوغاريتم $\varsigma = \log(1-z)$ ينقل بشكل محافظ القرص المغلق $\rho < 1$, $|z| \leq \rho$إلى المنطقة المحدبة G، المغلقة والمتناظرة بالنسبة للمحور الحقيقي . فإذا كانت d القيمة العظمى لطويلة النقطة ςعندما تتحول هذه النقطة على المجموعة Gأي إذا كان:

(3.6)

كان مستقر المنحني $-2e^{it}\log\left(1-e^{-it}z_0\right)$ عندئذ موجوداً داخل القرص $|w| \leq 2\mathrm{d}$ وبالتالي كان الغلاف المحدب للمنحني $W(t)$ أي مستقر الدالي المعطى موجوداً داخل القرص $|w+z_0| \leq 2\mathrm{d}$.

نخلص من ذلك إلى النتيجة الآتية:

نتيجة **(3.3.2)**

منطقة تغير قيم الدالي:

هي المنطقة المحدبة G المغلقة والمتناظرة بالنسبة للمحور الحقيقي والمحتواة ضمن القرص $|w-z_0| \leq 2\mathrm{d}$ حيث d معطى بواسطة العلاقة (3.6).

لنبحث الآن عن مستقر الدالي$J(f) = f(z) + f'(z) + f^{(n)}(z)$ المعرف في الفضاء V وذلك في النقطة $z_0 = 0$.

بأخذ:

$a_0(z_0) = a_1(z_0$

في المبرهنة (**3.2.1**) يكون لمعادلة المنحني Γ الشكل:

$H(z_0, t$

الذي يغدو في الصفر من الشكل:

$W(t) = H($

وهذا الشكل يمثل دائرة معادلتها $|w-1| = 2(n-1)!$. بذلك يكون القرص المغلق $|w-1| \leq 2(n-1)!$. هو الغلاف المحدب للمنحني Γ الذي يشكل في الوقت نفسه منطقة تغير قيم الدالي المطلوبة.

نخلص من ذلك إلى النتيجة الآتية:

نتيجة (*3.3.3*)

منطقة تغير قيم الدالي:

في النقطة $z_0 = 0$ هي القرص المغلق $|w-1| \leq 2(n-1)!$.

ملاحظة (**3.3.1**)

من المثال السابق نستنتج مباشرة أن مستقر الدالي:

في النقطة $z_0 = 0$ هو الغلاف المحدب للمنحني Γ الذي له في هذه الحالة الشكل:

أي القرص المغلق $|w| = 2(n-1)!$.

مسألة تقدير الأمثال في الأسرة V 3.4

ليكن $f \in V$ وليكن:

(3.7)

منشور التابع f في سلسلة تايلور في قرص الواحدة. ولدينا بحسب المبرهنة (**3.1.2**) أن الأمثال a_n في هذه السلسلة تحقق المتراجحات $|a_n| \leq {}^{2}/_{n}$.

سوف نبرهن على هذه الحقيقة بطريقة أخرى من خلال الدراسة السابقة.

مبرهنة (**3.4.1**)

إذا كانت f تنتمي إلى الأسرة V فإن الأمثال في السلسلة (3.7) تحقق المتراجحات:

$(*)$

إثبات: لدينا أولاً بحسب الملاحظة (**3.3.1**) أن مستقر الدالي $J(f) = f^{(n)}(z)$ المعرف في الفضاء G عندما يكون $z_0 = 0$ هو القرص المغلق $|w| \leq 2(n-1)!$. ومن ناحية أخرى إذا كانت السلسلة (3.7) منشور التابع f في سلسلة تايلور في قرص الواحدة كان:
$f^{(n)}(0) = n!\,a_n$. وبما أن قيمة الدالي $f^{(n)}(0)$ تقع - كما رأينا - ضمن القرص $|w| \leq 2(n-1)!$ إذن:

ومنه:

من أجل كل عدد طبيعي موجب n وهو المطلوب.

ملاحظة *(3.4.1)*

إن المتراجحات(*) لا تقبل تقديراً أفضل وذلك لوجود تابع هي:

تتحول من أجلها المتراجحات(*) - بعد نشر هذا التابع في سلسلة تايلور- إلى مساواة من أجل كل n.

الفصل الرابع

تحديد مستقر الداليات في فضاء التوابع النجمية S^*

4.1 فضاء التوابع النجمية S^*

تعريف (**4.1.1**)

نقول إن المنطقة G نجمية بالنسبة للنقطة a (التي تنتمي إلى G) إذا كان كل مستقيم مار من a قاطعاً للمنطقة G وفق قطعة مستقيمة أو نصف مستقيم أو مستقيم واقعاً كلياً في المنطقة G.

إذا كان $a = 0$ قلنا أن G نجمية بالنسبة للصفر.

ليكن $f(z)$ تابعاً متبايناً في القرص D وله المنشور الآتي:

في هذا القرص إذا كان هذا التابع ينقل قرص الواحدة D إلى منطقة نجمية بالنسبة للصفر، دعوناه بالتابع النجمي في D.

نرمز لمجموعة التوابع النجمية في D بالرمز S^*.

ملاحظة (**4.1.1**)

يمثل تابع كيبي $(Koebe)$ المعطى بالشكل:

تابعاً نجمياً في قرص الواحدة $|z| < 1$، لأن هذا التابع ينقل قرص الواحدة إلى منطقة نجمية بالنسبة للصفر و هذه المنطقة في المستوى المقصوص على طول نصف المستقيم $\left]-\infty, -\frac{1}{4}\right]$.

سنبين فيما يلي الشرط اللازم والكافي لكي يكون التابع $f(z)$ نجمياً في القرص D، في سبيل ذلك نفرض أن التابع:

تحويلاً لقرص الواحدة $|z| < 1$ في المنطقة G وتحويلا للقرص $|z| < r$ حيث $0 < r < 1$ في المنطقة D_r. من التعريف نستنتج أن الشرط اللازم والكافي كي تكون المنطقة G نجمية بالنسبة للنقطة z_0 هو أن تنتمي كل نقطة من الشكل:

إلى المنطقة G وعندئذ يكون التابع:

تحليلياً في القرص $|z| < 1$ ويحقق فيه الشرطين:

ينتج من ذلك ، بحسب تمهيدية شفارتز، أن:

ومن المطابقة:

ينتج عندما z تنتمي إلى القرص $|z| < r$ أن:

حيث $f[w_t(z)] \in D_r$ كون:

بذلك نكون قد برهنا على ما يلي:

مبرهنة **(4.1.1)**

الشرط اللازم والكافي لنجمية المنطقة G بالنسبة للنقطة O هو نجمية كل من المناطق D_rبالنسبة للصفر حيث $0 < r < 1$.

تبين الدراسات الهندسية [8] أن الشرط اللازم والكافي لنجمية المنطقة D_r هو أن يكون $\arg f(z)$ تابعاً متزايداً بالنسبة للسعة φ حيث $z = re^{i\varphi}$ أي عندما:

وباشتقاق طرفي المطابقة:

بالنسبة للمتحول φ نحصل على:

ومنه:

نستنتج من ذلك النظرية الآتية :

مبرهنة **(4.1.2)**

الشرط اللازم والكافي لنجمية المنطقة G هو أن يكون:

(4.1)

ملاحظة **(4.1.2)**

لنلاحظ الآن أن المقدار:

(4.2)

يسعى إلى الواحد عندما تسعى z نحو الصفر، نستنتج من ذلك أن الشرط (4.1) محقق في القرص $|z| < 1$ عندما يكون r صغيرا بما فيه الكفاية.
بذلك تكون المبرهنة التالية صحيحة:

مبرهنة **(4.1.3)**

ينقل التابع التحليلي:

(4.3)

القرص $|z| < 1$ الصغير بما فيه الكفاية ، إلى منطقة نجمية بالنسبة للصفر.
بكلمات أخرى: يمثل التابع (4.3) تابعاً نجمياً في جوار صغير بما فيه الكفاية للصفر.

ملاحظة **(4.1.3)**

ليكن r^* نصف قطر القرص الأعظمي الذي يكون من أجله $f(z)$ تابعاً نجمياً، يدعى العدد r^* في هذه الحالة: بنصف قطر النجمية، ويمكن البرهان على أن نصف قطر النجمية يعطى بالعلاقة[8]:
$$r^* = 0.65 \ldots..$$

تقدير أمثال التابع النجمي 4.2

لتكن S^* مجموعة التوابع النجمية في قرص الواحدة $|z| < 1$، عندئذ من العلاقتين $(4.1), (4.2)$ نستنتج أن التابع $h(z)$ المعطى بالعلاقة:

(4.4)

يحقق الشرطين:

ومنه تنتج المبرهنة الآتية:

مبرهنة **(4.2.1)**

ترتبط توابع الأسرتين C و S^* بالعلاقة:

حيث لـ $h(z)$ الشكل (4.4).

مبرهنة **(4.2.2)**

إذا كان التابع:

(4.5)

نجمياً في قرص الواحدة $|z| < 1$ فإن أمثاله تحقق المتراجحات:

(4.6)

إثبات: بما أن التابع $f(z)$ نجمي في قرص الواحدة فإن:

من المبرهنة(**4.2.1**) نستنتج أن التابع zf'/f يقبل النشر في سلسلة القوى الآتية:

(4.7)

وبما أن:

$f =$

إذن :

باستخدام جداء كوشي للسلاسل ثم مقارنة الأمثال نحصل من أجل $n > 2$ على:

na_n

ومن هذه العلاقات نجد أن:

$$a_2 = a_1 b_1$$

$$2a_3 = a_1 b_2 + a$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$(n-1)a_n = a_1$$

حيث: $a_1 = 1$

لنلاحظ الآن أن التابع (4.7) ينتمي إلى الأسرة C فأمثال منشوره في سلسلة القوى تحقق – بحسب المبرهنة (**2.4.1**) - المتراجحات:

ولذلك:

$2|a_3|$

وعموماً، من أجل $n > 2$:

$(n-1)$

وهذا يؤدي بدوره إلى أن: $|a_n| \le n$.

التمثيل التكاملي في الفضاء S^* 4.3

رأينا (مبرهنة(**4.2.1**)) أن انتماء التابع f للأسرة S^* يكافئ انتماء التابع zf'/f للأسرة C

سوف نستفيد من هذه العلاقة ومن الصيغة البنيوية في Cلإيجاد التمثيل التكاملي لتوابع الأسرة S^*.

مبرهنة (**4.3.1**)

إذا كان $f \in S^*$ فإن:

إثبات: من العلاقات:

$$\left(\log\frac{f}{z}\right)' =$$

نلاحظ بحسب المبرهنة (**4.2.1**) أن: $h \in C$ وبالتالي:

بمكاملة الطرفين بالنسبة للمتحول z ثم الاختصار نجد أن:

$$\log \frac{f}{z} =$$

ومنه نستنتج أن:

وبالتالي:

وهو المطلوب.

4.4 تطبيق للمسألة في الفضاء S^*

تطبيق **(4.4.1)**

إذا كان $f \in S^*$ فإن منطقة تحول الدالي $F(f) = \left[{}^{z}/_{f(z)} \right]^{1/2}$ في النقطة z_0 هي القرص:

إثبات: بما أن $f \in S^*$ فإن:

وبالتالي:

F

وبذلك يكون:

بالاستفادة من المبرهنة (**1.7.1**) نستنتج أن منطقة تحول الدالي $\log\left({}^{z}/_{f(z)}\right)^{1/2}$ هو الغلاف المحدب للمنحني:

$\Gamma: w$

لمعرفة هذه المنطقة نلاحظ أولاً أنه عندما يكون $0 < \rho < 1$. $|z| = |z_0| = \rho$ فإن:

$1 - e^{-it}z =$

ثم نستفيد من الحقيقة [8] أن الفرع الرئيس للوغاريتم $w = \log z$ ينقل بشكل محافظ القرص المغلق $|z - 1| < \rho$ إلى المنطقة G المحدبة والمحددة بالمحيط الناتج من المنحني:

وبذلك تكون Gهي المنطقة نفسها التي تتحول قيم الدالي $\log\left({}^{z}/_{f(z)}\right)^{1/2}$ ضمنها. ومن ذلك نستنتج أن صورة $\left({}^{z}/_{f(z)}\right)^{1/2}$ هي الصورة العكسية للمنطقة G أي القرص:

الاستنتاجات

توصلنا في الرسالة إلى النتائج التالية:

أولاً: فضاء كاراتيودوري:

أ- بينا أنه إذا كان $h \in C$ فإن: $\left|\frac{h'(z_0)}{h(z_0)}\right| \leq \frac{1}{1-|z_0|^2}$.

ب- حساب مستقر الداليين: $J(f) = f(z_0)\ ,J(f) = z_0 f(z_0)$ وتبين أن كل من هذين المستقرين قرص مغلق وتم تحديد مركزه ونصف قطره.

ت- حددنا منطقة تغير قيم الدالي $F(f) = f(z_0) + f^{(n)}(z_0)$

ث- بينا بطريقة جديدة أن أمثال منشور التابع $f(z)$ في الأسرة C في سلسلة تايلور تحقق المتراجحات: $|b_n| \leq 2; n = 1,2,3,\cdots$

ثانياً: فضاء الدوال ذات الدوران المحدود:

أ- حددنا منطقة مستقر الداليين $J(f) = f'(z_0), J(f) = f(z_0)$.

ب- بينا أن أمثال منشور سلسلة تايلور في هذا الفضاء تحقق المتراجحات $|a_n| \leq \frac{2}{n}$.

ثالثاً: في فضاء التوابع النجمية:

بينا أن مستقر الدالي $F(f) = \left[{}^{z}\!/_{f(z)}\right]^{1/2}$ في النقطة z_0 هي القرص الذي مركزه 1 ونصف قطره ρ: $0 < \rho < 1$.

التوصيات

بالإمكان متابعة دراسة الداليات الخطية المذكورة سابقاً في فضاءات أخرى أكثر عمومية، ولكنها أيضاً تابعة للأسرة E_q. فمثلاً: بالإمكان اعتماد الطريقة السابقة لدراسة بعض الداليات الخطية في الفضاءات من الشكل:

أ- C_α وهي أسرة التوابع التحليلية في قرص الواحدة والتي تقبل عناصرها التمثيل التكاملي الآتي:

$\mu(t)$ تحقق الشروط نفسها و $-1 \leq \alpha \leq +1$.

ب- C_α^β وهي أسرة التوابع التحليلية في قرص الواحدة التي تقبل عناصرها التمثيل التكاملي التالي:

$\mu(t)$ تحقق الشروط نفسها و $-1 \leq \alpha \leq +1 \; ; \; -1 \leq \beta \leq +1$.

وفضاءات أخرى.....

References

[1].ALEKSANDROV, I. *Boundary Values of Functional on the Class of Holomorphic Functions Univalent in a Circle* . Sibirsk , Mat. Z. 4 , (1963) , 17-31.

[2] BADDOUR,H. *About the range of variability of linear functionals in Caratheodory Classe*. Damascus univ.journal- No.28 – 1998.

[3] BADDOUR,H. *The izoperimetric problem in Hardy Space* ,Irbid Journal of Research and Studies , Vol (6) No (1) 2003.

[4] BADDOUR,H. *The set of values of functionals in classes of functions having integral representation*, Jordan journal of mathematics and statistics,2008,pp.91-96.

[5] CARATHEODORY,K.C, UBER DEN *Variability Berekh Der Fourierschenten von positive Harmonischen Function*. REN.DI PALERMO.32(10,11)(0,3-217).

[6]KRZYZ J*. Theory and Problems in Analytic Functions*. P.W.N Warsaw 1975 .

[7] NATANSON,I.P *theorie der functionen reelen veranderlichen* , Berlin10,54.

[8] POMMERENKECh *Univalent Functions* . Vandehhoeck & Go`ttingen 1975.

الأبحاث المنشورة

تم نشر بحث ببعض نتائج الرسالة في سلسلة العلوم الأساسية من مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية المجلد(30) العدد(2) عام 2008 وهو بعنوان:

تحديد مجموعات قيم بعض الداليات في فضاءات الدوال الممثلة بالتكامل

د. حسن بدور

أستاذ في قسم الرياضيات

كلية العلوم – جامعة تشرين

أحمد ديب

طالب ماجستير في قسم الرياضيات

كلية العلوم – جامعة تشرين

الملخص

يقدم هذا البحث طريقة معينة لتحديد مستقر بعض الداليات العقدية المختارة في فضاء كاراتيودوري وهو فضاء التوابع التحليلية في قرص الواحدة الذي يحقق الشرط:

وأيضاً في فضاء الدوال النجمية المرتبطة معه. باستخدام التمثيل التكاملي للدوال تم تحديد منطقة تحول بعض الداليات في كل من هذين الفضاءين من الشكل:

The range of variability of some functionals in classes of functions possessing structural representation

Hassan Baddour

Department of Mathematics

University of Tishreen

Ahmad deeb

Department of Mathematics

MSc Student .

ABSTRACT

This paper presents a certain method to determine the range of variability of linear functionals defined in the Caratheodory Class (i.e. the class of analytic functions in the unit disk ($|z| < 1$) with a positive real part and $f(0) = 1$ and in the class of star like functions related to it

Using the integral representation of functions in these classes some estimations for the functional of the type $J(f) = F[f(z_0), f'(z_0)]$ have been obtained.

In this way we see that $f \in E_q$ with $\alpha = -\pi, \beta = +\pi$, and

Theorem 2 . The set of values of the functional

(7)

is theconvex hull of the curve Γ given by the equation

(8) $w(z_0, t)$

Where $-\pi \leq t \leq +\pi$.

6. Applications

In what follows we will give some propositions as an application of the above theorem .

Proposition 1. The sets of values of functional $F(f) = f(z_0)$ with $f \in V$ and $z_0 \in D$ is the closed set G which is connected , symmetric with respect to the real axis and contained in the disc $|w - z_0| \leq 2d$ where

Proposition 2 The sets of values of functional

at the point $z_0 = 0$ is the closed disc with center at **1** and radius $2(n-1)!$

Proposition3. If (9)is the Taylor Eexpansion of $f \in V$ in the neighborhood of **0**then the following estimates hold:

at the point $z = 0$. Noticing that the curve Γ in this case is given by the equation

$w(t)$

(which represents a circle $|w| = 2n!$) we can conclude that the closed disc $|w| \leq 2n!$ is the convex hull of Γ and it is at the same time the set of values of the given functional . Now let (6) be the expansion the function $f(z)$ in Taylor series . We know that

On the other hand we have shown that the value $f^{(n)}(0)$ lies in the disc $|w \leq 2n!|$ for every f . This implies the relation

which shows that the estimates $|b_n| \leq 2$ hold for every n .

5. The problem in the class of functions with limited rotation

Let V denote the family of analytic functions f in the unit disk D satisfying the conditions:

This family is known as the class of functions with limited rotation.

Lemma 2. If $f \in V$ then :

a) $f' \in C$.

b) $f \in E_q$

Proof. a) If $f \in V$ then (by the definition) $f'(0) = 1$. From the other side the condition $\frac{-\pi}{2} < \arg f'(z) < \frac{+\pi}{2}$ implies that

$re\, f$

and hence $f' \in C$.

b) From the fact that $f' \in C$ and formula (1) we conclude that

And hence the functions of V has the following integral representation:

The following properties hold:

Property 1 . The sets of values of functional $F(f) = f(z_0)$ when $f \in C$ and $z_0 \in D$ is the closed disc $|w - w_0| \leq \mathrm{R}$ where

(4)

Property 2 . The sets of values of functional $F(f) = z_0 f(z_0)$ when $f \in C$ and z_0 belongs to the segment $[-1-i, +1+i]$ is the closed disc $|w - w_0| \leq R$ where

(5)

Property 3 . The sets of values of functional $F(f) = f(z) + f^{(n)}(z)$ .where $f \in C$ in the point $z = 0$ is the closed disc $|w - 1| \leq 2n!$

To proof. this property we put:

$a_0(z$

in theorem 2 .Then the curve Γ will take the form

$w(t) = H(0, t$

Thus the .This curve represents a circle which equation is $|w - 1| \leq 2n!$ closed disc $|w - 1| \leq 2n!$is the convex hall of this circle and it gives , at the same time , the range of variability of the given functional .

4. The estimations of coefficients

It is well known that, in the Class C the coefficients of the function $f(z)$ (in its Taylor expansion) satisfy the estimates:$|b_n| \leq 2$ for every n . We will show this fact using the above theorem.

Theorem3. If $f \in C$and

(6)

Then $|b_n| \leq 2$; $n = 1,2,3,\cdots$

Proof. Let us first find the range of variability of the functional

$J(f)$

Putting

we obtain the functional J depending only on $\mu(t)$ and so we can write

Substituting $H(t) = H(z_0, t)$ in lemma (1) we get the thesis of theorem

3. The solution of the problem in Class *C*

Let C denote the family of analytic functions f in the unit disk D with a positive real part and $f(0) = 1$. This family is known as the

Caratheodory Class . It is well known ([1] and [3]) that the functions of this class can be represented by the following formula

Where $\mu \in U[-\pi, +\pi]$(U in this case is the set of nondecreasing functions on the interval $[-\pi, +\pi]$ such that $\mu(+\pi) - \mu(-\pi) = 1$).The above formula is known as the structural formula in the Caratheodory Class. We see that the class C coincides with the family E_q when we put

$q(z_0, t) = \frac{e^{it}+z_0}{e^{it}-z_0}$ and $\alpha = -\pi, \beta = +\pi$

The following theorem follows immediately from theorem1:

Theorem 2 . The range of variability of the functional (2) with $f \in C$ is theconvex hull of the curve Γ given by the equation

$H(z_0, t) = a_0$

(the convex hull of the set W is the smallest convex set containing the set W and denoted by $conv\ W$).In the sequel we shall make use of the following lemma:

Lemma1. If $H(t)$ is a complex and continuous function with a real variable t on the interval $[\alpha, \beta]$ and $U[\alpha, \beta]$ the set of nondecreasing functions $\mu(t)$ on this interval such that $\mu(\alpha) = 0, \mu(\beta) = 1$, then the set of values of the integral

is theconvex hall of the curve Γ given by equation

Theorem 1. The range of variability of the linear functional

(2)

is theconvex hull of the curve Γ, given by equation

$(2'')$

Where $q(z_0, t)$ are given by the relations (1) , z_0 is some fixed point in the unit disc D and $a_k(z)$ are continuos functions on this disc .

Proof: Let us examine now the set of values of the functional

Differentiation of both sides in the formula (1) gives the relations

(3)

and so

The investigation of linear functionals in the class E_q

ABSTRACT

1. Introduction

The fundamental and most frequently considered extremal problem in the domain of complex functions is concerned with determining the range of variability of the functional

$J(f)$

defined on some family E of analytic functions where z_0 is a fixed point of the domain in which the functions f are defined. A survey of methods and results can be found among others in [3] and [4].

In this work we shall present a certain method to determine the range of variability of the linear functional

$(*)$

defined in the family E_q i.e. the family of functions possessing an integral representation in the unit disk.

2. The problem in the Class E_q

Let E_q denote the class of functions given by the formula:

(1)

Where $q(z,t)$ is an analytic function in the unit disc $D(|z| < 1)$ for every fixed $t \in [\alpha, \beta]$ and $\mu(t)$ is a nondecreasing function in the interval $[\alpha, \beta]$ such that $\mu(\beta) - \mu(\alpha) = 1$.

This class is known as the family of functions possessing an integral representation .It is to be proved that [4]:

1- The class E_q is compact and connected in the topology of almost uniform convergence.

2- The set of values of functional $F(f) = f(z_0)$ where $f \in E_q$ and $z_0 \in D$ is closed , convex and connected and it is at the same time theconvex hull of the curve given by equation:

Syrian Arab Republic

Tishreen University

Faculty of Science

Dep. of Mathematics



الجمهورية العربية السورية

جامـــعة تشـــرين

كلية العلوم

قسم الرياضيات

EXSTREMAL PROBLEMS IN CLASSES OF FUNCTIOS POSSESSING AN INTEGRAL REPRESENTATION

Dissertation Submitted for MS. C. Degree

in Mathematical Analysis

By

Ahmad Deeb

Supervisor

Prof Dr Hassan Baddour

<u>2 0 1 1</u>